

REŠENJE: Svi obrasci za deformacije vade analogno i za brzine deformacije.

a) Polazeći od definicije brzine deformacije $\dot{\epsilon} = \dot{\Delta l} / l$, $\dot{\epsilon} = \dot{\Delta h} / h$, za slučaj istezanja i sabijanja epruveta dobija se:

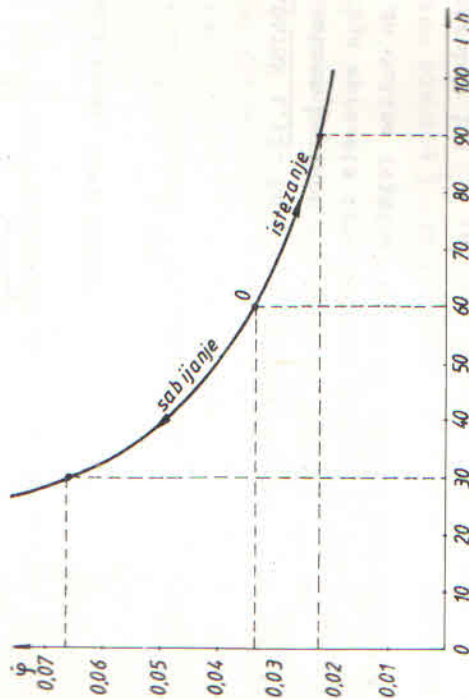
$$\dot{\epsilon}_l = \frac{d\dot{\Delta l}}{dt} = \frac{d^2 l / dt^2}{l} = \frac{v}{l} \quad [s^{-1}] \quad (1.18)$$

$$\dot{\epsilon}_h = \frac{d\dot{\Delta h}}{dt} = \frac{d^2 h / dt^2}{h} = \frac{v}{h} \quad (1.19)$$

Za date podatke dobija se:

$$\dot{\epsilon}_l = 0,022 \text{ s}^{-1}, \quad \dot{\epsilon}_h = 0,066 \text{ s}^{-1}$$

b) Grafički prikazi promene brzine deformacije dati su na slici 1.8. Uočava se da, iako su apsolutne deformacije iste ($\Delta l = \Delta h$), brzine deformacije se bitno razlikuju.



Sli. 1.8

POGLAVLJE II: NAPONI, NAPONSKO-DEFORMACIONI ODNOSI

ZADATAK 1.13: U jednoj tački tela koje se deformiše poznat je tenzor napona:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} 30 & 20 & 10 \\ 20 & 20 & 15 \\ 10 & 15 & 40 \end{vmatrix}$$

Potrebno je odrediti:

- glavne normalne napone i glavne (maksimalne) smičuće napone;
- uglove pravaca glavnih normalnih napona prema koordinatnim osama;
- sverični tenzor napona i devijator tenzora napona;
- normalni napon σ_n i smičući napon τ_n u ravni koja prolazi kroz posmatranu tačku, čija normala zaklapa sa pozitivnim koordinatnim osama uglove, čiji su kosinusi: $a_x = \cos(n, x) = 1/3$, $a_y = \cos(n, y) = 1/4$, $a_z = \cos(n, z) = 5/12$;
- ekvivalentni napon i odnos ekvivalentnog napona i maksimalnog smičućeg napona.

REŠENJE:

a) Glavni normalni naponi određuju se iz kubne jednačine oblika $J_3 \lambda^3 - J_2 \lambda^2 + J_1 \lambda - J_3 = 0$

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (1.20)$$

U jednačini (1.20) J_1 , J_2 i J_3 su invarijante tenzora napona:

$$J_1(T_{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2(T_0) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy} \sigma_{yz} + \sigma_{yz} \sigma_{zx} + \sigma_{zx} \sigma_{xy} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \quad (1.21)$$

Opšte rešenje jednačine (1.20) je dato u literaturi /7/.
Kako su rešenja u ovom slučaju realna, treba uvesti smenu:

$$\sigma = t + \frac{J_1}{3}, \quad (1.22)$$

čime se jednačina (1.20) transformiše na oblik:

$$t^3 + p \cdot t + q = 0 \quad (1.23)$$

gde su:

$$p = J_2 - J_1^2/3, \quad q = -2J_1^3/27 + J_1 J_2/3 - J_3$$

Rešavanjem jednačine (1.23) i korišćenjem smene (1.22) dobijaju se rešenja izvorne jednačine (1.20):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\sqrt[3]{p} \cdot \cos(\phi/3) + J_1/3 \\ \sigma_2 &= 2\sqrt[3]{p} \cdot \cos(\phi/3 + 4\pi/3) + J_1/3 \\ \sigma_3 &= 2\sqrt[3]{p} \cdot \cos(\phi/3 + 2\pi/3) + J_1/3 \end{aligned} \quad (1.24)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[3]{-p/27}, \\ \phi &= \arccos(-q/2\rho) \end{aligned}$$

Kako je opšti oblik tenzora napona:

$$T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

to se unošenjem datih podataka u izraze (1.20)-(1.24) dobija:

$$J_1 = 90, \quad J_2 = 1875, \quad J_3 = 5250$$

$$p = 1875 - 90^2/3 = -825$$

$$q = -2 \cdot 90^3/27 + 90 \cdot 1875/3 - 5250 = -3000$$

$$\rho = 4560,36 \quad \text{i} \quad \phi = 70,8^\circ$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt[3]{4560,36} \cdot \cos(70,8^\circ/3) + 90/3 = 60,393$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt[3]{4560,36} \cdot \cos(70,8^\circ/3 + 240^\circ) + 90/3 = 26,303 \quad (\text{daN/mm}^2)$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt[3]{4560,36} \cdot \cos(70,8^\circ/3 + 120^\circ) + 90/3 = 3,304$$

Provera proračuna može da se izvrši pomoću invarijantata tenzora napona, na primer:

$$J_1 = 60,393 + 26,303 + 3,304 = 90$$

Napomena: Rešenje jednačine (1.20) može se naći direktno, na drugi način. Na primer, jedno rešenje se može, sa dovoljno tačnosti, dobiti primenom Hornerovog postupka. Ostala dva rešenja se dobijaju rešavanjem kvadratne jednačine.

Glavni smičući naponi se dobijaju iz sledećih izraza:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, & \tau_{23} &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, & \tau_{31} &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sledi:

$$\tau_{12} = \pm \frac{60,393 - 26,303}{2} = \pm 17,045$$

$$\tau_{23} = \pm \frac{26,303 - 3,304}{2} = \pm 11,499 \quad (\text{daN/mm}^2)$$

$$\tau_{31} = \pm \frac{3,304 - 60,393}{2} = \mp 28,544$$

b) Kosinusi glavnih pravaca nalaze se resavanjem sistema omogjenih jednačina oblika /64/:

$$(\sigma_x^{-\sigma_i}) \cdot a_{ix} + \tau_{xy} \cdot a_{iy} + \tau_{xz} \cdot a_{iz} = 0$$

$$\tau_{yx} \cdot a_{ix} + (\sigma_y^{-\sigma_i}) \cdot a_{iy} + \tau_{yz} \cdot a_{iz} = 0, \quad i=1,2,3 \quad (1.27)$$

$$\tau_{zx} \cdot a_{ix} + \tau_{zy} \cdot a_{iy} + (\sigma_z^{-\sigma_i}) \cdot a_{iz} = 0$$

korišćenjem uslova:

$$a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2 = 1 \quad (1.28)$$

Za glavni normalni napon $\sigma_i = \sigma_1$ jednačine (1.27) postaju:

$$-30,393 \cdot a_{ix} + 20 \cdot a_{iy} + 10 \cdot a_{iz} = 0$$

$$20 \cdot a_{ix} - 40,393 \cdot a_{iy} + 15 \cdot a_{iz} = 0$$

$$10 \cdot a_{ix} + 15 \cdot a_{iy} - 20,393 \cdot a_{iz} = 0$$

Uz korišćenje uslova (1.28) dobija se:

$$\sigma_x = 0,55465 (\alpha_{1x} = 56,31^\circ), \quad a_{1y} = 0,5168 (\alpha_{1y} = 58,88^\circ), \quad a_{1z} = 0,65214 (\alpha_{1z} = 49,3^\circ)$$

analogno se za ostala dva glavna napona dobija:

$$a_{2x} = 0,71116 (\alpha_{2x} = 44,67^\circ); \quad a_{2y} = 0,20481 (\alpha_{2y} = 78,18^\circ); \quad a_{2z} = -0,67253 (\alpha_{2z} = 132,26^\circ)$$

$$a_{3x} = 0,54329 (\alpha_{3x} = 57,09^\circ); \quad a_{3y} = -0,81852 (\alpha_{3y} = 144,94^\circ); \quad a_{3z} = 0,18669 (\alpha_{3z} = 79,24^\circ)$$

c) Tenzor napona se može izraziti kao zbir sfernog tenzora i devijatora tenzora napona /64/, /59/, /46/:

$$T_\sigma^S = T_\sigma^S + D_\sigma$$

Sferni tenzor napona se izražava u obliku:

$$T_\sigma^S = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

S obzirom na pravila matičnog računanja devijator tenzora napona će biti:

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^{-\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y^{-\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z^{-\sigma} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

U obrascima (1.29) i (1.30) σ je srednji normalni napon:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (1.31)$$

Za date podatke dobija se:

$$\sigma = \frac{30 + 20 + 40}{3} = 30 \quad \text{daN/mm}^2$$

$$T_\sigma^S = \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 30 & \\ & & 30 \end{pmatrix}; \quad D_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 20 & -10 & 15 \\ 10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

d) Moraju se najpre odrediti projekcije totalnog (ukupnog) napona na koordinatne ose i intenzitet totalnog napona, po obrascima /64/, /59/, /46/:

$$P_{nx} = \sigma_x \cdot a_x + \tau_{xy} \cdot a_y + \tau_{xz} \cdot a_z$$

$$(1.31)$$

$$P_{ny} = \tau_{yx} \cdot a_x + \sigma_y \cdot a_y + \tau_{yz} \cdot a_z$$

$$P_{nz} = \tau_{zx} \cdot a_x + \tau_{zy} \cdot a_y + \sigma_z \cdot a_z$$

$$P_n = \sqrt{P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2} \quad (1.32)$$

Za date podatke dobija se:

$$P_{nx} = 30 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot \frac{5}{10} = 19,17$$

$$P_{ny} = 20 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 15 \cdot \frac{5}{12} = 17,92$$

$$P_{nz} = 10 \cdot \frac{1}{3} + 15 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{5}{12} = 23,75$$

$$P_n = \sqrt{19,17^2 + 17,92^2 + 23,75^2} = 35,39 \text{ daN/mm}^2$$

Komponente totalnog napona u datoj ravni određuju se

obrasca:

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot a_x^2 + \sigma_y \cdot a_y^2 + \sigma_z \cdot a_z^2 + 2\tau_{xy} \cdot a_x \cdot a_y + 2\tau_{yz} \cdot a_y \cdot a_z + 2\tau_{zx} \cdot a_z \cdot a_x \quad (1.33)$$

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_n^2} \quad (1.34)$$

Sledi:

$$\sigma_n = 30 \cdot (1/3)^2 + 20 \cdot (1/4)^2 + 40 \cdot (5/12)^2 + 2 \cdot 20 \cdot (1/3) \cdot (1/4) +$$

$$+ 2 \cdot 15 \cdot (1/4) \cdot (5/12) + 2 \cdot 10 \cdot (5/12) \cdot (1/3) = 20,76$$

$$\tau_n = \sqrt{35,39^2 - 20,76^2} = 28,66 \text{ daN/mm}^2$$

e) Ekvivalentni (uopštteni, efektivni) napon definisan je razima /64/, /46/, /11/:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.35)$$

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.36)$$

Primenom obrasca (1.36) dobija se:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(60,393 - 26,303)^2 + (26,303 - 3,304)^2 + (3,304 - 60,393)^2} = 49,75$$

Iz poznatih relacija lako je pokazati da uvek važi sledeći odnos:

$$2 \geq \frac{\sigma_e}{|\tau_{\max}|} \geq \sqrt{3} \quad (1.37)$$

U ovom slučaju se dobija:

$$\frac{\sigma_e}{|\tau_{\max}|} = \frac{49,75}{28,544} = 1,743 > \sqrt{3}$$

ZADATAK 1.14: U jednoj tački zone plastičnih deformacija tela koja se deformiše određen je tenzor napona:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 25,4 & 10 & 15,264 \\ 10 & 15,5 & 10 \\ 15,264 & 10 & 10,55 \end{bmatrix}$$

Potrebno je odrediti:

a) glavne normalne napone;

b) ekvivalentni napon.

REŠENJE:

a) Potrebno je najpre odrediti invarijante tenzora napona.

Primenom obrazaca (1.21) dobija se:

$$J_1(T_0) = 51,45; \quad J_2(T_0) = 392,2; \quad J_3(T_0) = 0 \quad (\text{dan/mm}^2)$$

Izraz (1.20) se sada svodi na oblik:

$$\sigma^3 - J_1 \cdot \sigma^2 + J_2 \cdot \sigma = \sigma \cdot (\sigma^2 - J_1 \cdot \sigma + J_2) = 0$$

Iz navedene jednačine sleduje da je jedan glavni normalni napon jednak nuli, npr. $\sigma_3 = 0$. Ostala dva napona se nalaze iz kvadratne jednačine:

$$\sigma_{1/2} = \frac{J_1 \pm \sqrt{J_1^2 - 4J_2}}{2} = \frac{51,45 \pm \sqrt{(51,45)^2 - 4 \cdot 392,2}}{2} =$$

$$= 25,725 \pm 16,419$$

Sledi:

$$\sigma_1 = 42,14, \quad \sigma_2 = 9,31 \quad (\text{dan/mm}^2)$$

b) Kako je $\sigma_3 = 0$ izraz (1.36) se svodi na jednostavan

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad (1.38)$$

Dobija se:

$$\sigma_e = \sqrt{42,14^2 + 9,31^2} = 42,14 \cdot 9,31 = 38,34 \quad \text{dan/mm}^2$$

ZADATAK 1.15: Za slučaj ravanskog deformacionog stanja potrebno je:

- postaviti izraz za određivanje srednjeg po veličini normalnog glavnog napona i srednjeg napona;
- postaviti izraz za određivanje ekvivalentnog napona;
- izvesti obrasce za određivanje koeficijenta napon-skog i deformacionog stanja za ovaj slučaj;

d) Odrediti navedene veličine ako su: $\sigma_1 = 100$, $\sigma_3 = 90$ (N/mm^2)

REŠENJE:

a) Za velike deformacije, prema deformacionoj teoriji, odnosi između komponenta tenzora deformacije i komponenta tenzora napona definišu se opštim izrazom $/64/$, $/46/$, $/11/$:

$$\frac{\phi_x - \phi_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\phi_y - \phi_z}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\phi_z - \phi_x}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = 1/\lambda \quad (1.39)$$

gde je:

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\phi_e} \quad (1.40)$$

Za glavne napone i deformacije izraz (1.39) se transformiše u oblik:

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\phi_2 - \phi_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\phi_3 - \phi_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = 1/\lambda \quad (1.41)$$

Izraz (1.41) sledi neposredno iz obrazaca koji definišu direktnu vezu glavnih normalnih napona i deformacija $/64/$, $/46/$, $/11/$:

$$\sigma_1 - \sigma = \lambda \cdot \phi_1, \quad \sigma_2 - \sigma = \lambda \cdot \phi_2, \quad \sigma_3 - \sigma = \lambda \cdot \phi_3 \quad (1.42)$$

Za ravansko deformaciono stanje važi $\phi_2 = 0$ i $\phi_3 = -\phi_1$, te iz (1.41) sledi:

$$\phi_1 / (\sigma_1 - \sigma_2) = \phi_1 / (\sigma_2 - \sigma_3),$$

odakle je:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1.43)$$

Srednji normalni napon u ovom slučaju postaje:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sigma_2 \quad (1.44)$$

b) Polazeći od opšteg izraza (1.36) i relacije (1.44) lako se dobija:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (1.45)$$

c) Prema Lođeu i Nadalju koeficijenti vida naponskog i deformacionog stanja se izražavaju u obliku /46/, /37/:

$$\nu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.46)$$

$$\nu_e = \frac{2\phi_2 - \phi_1 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_3} = -3 \frac{\phi_1 + \phi_3}{\phi_1 - \phi_3} \quad (1.47)$$

d) Za date podatke dobija se:

$$\sigma_2 = \sigma = \frac{100 - 90}{2} = 5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (100 + 90) = 164,5 \text{ N/mm}^2$$

Za ravansko deformaciono stanje očigledno važi:

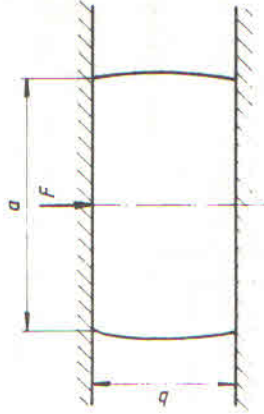
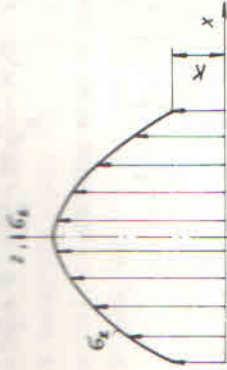
$$\nu_e = \nu_e = 0$$

Napomena: Obrasci (1.39) i (1.42) važe, analogno, i za vezu komponenta tenzora napona i komponenta tenzora brzine deformacije.

ZADATAK 1.16: Pri sabijanju bez trenja šipkastog priprema (sl. 1.4) izmerena je na kraju procesa sila $F=550 \text{ kN}$ i određen napon tečenja $K=55 \text{ N/mm}^2$.

Distribucija normalnog napona na kontaktnoj površini može se predstaviti u obliku funkcije (slika 1.9):

$$\sigma = \sigma_0 + C_1 \cdot x^2$$



Sl. 1.9

Potrebno je:

- naći maksimalnu vrednost normalnog napona;
- odrediti radni napon (pritisak) sabijanja;
- proveriti da li se na presi, nominalne sile $F_n=630 \text{ kN}$, može izvršiti sabijanje do širine ploče $a=55 \text{ mm}$, ako se pretpostavi da je $K=\text{const}$.

REŠENJE:

a) Zadana naponska funkcija sadrži dve nepoznate konstante koje treba odrediti:

Na slici 1.9 je zadat sledeći granični uslov:

$$\text{za } x=a/2 \text{ je } \sigma_x = K, \text{ tj.:}$$

$$K = C_0 - C_1 \cdot a^2 / 4$$

Iz uslova ravnoteže se dobija:

$$F = 2 \int_0^{a/2} \sigma_x \cdot \ell \cdot dx = 2 \ell \int_0^{a/2} (C_0 - C_1 \cdot x^2) \cdot dx = \ell (C_0 \cdot a - C_1 \cdot a^3 / 12)$$

Iz navedena dva uslova dobijaju se nepoznate konstante:

$$C_0 = K - \frac{3}{2} \left(K - \frac{\bar{F}}{a} \right); \quad C_1 = -\frac{6}{a} \left(K - \frac{\bar{F}}{a} \right); \quad \bar{F} = \frac{F}{k}$$

Naponska funkcija sada postaje:

$$\sigma_z = K + \frac{3}{2} \left(K - \frac{\bar{F}}{a} \right) \cdot \left(-\frac{4}{2} \cdot x^2 - 1 \right)$$

Maksimalna vrednost normalnog napona nalazi se na osi omada ($x=0$):

$$\sigma_{zmax} = \frac{3}{2} \left(\frac{\bar{F}}{a} - \frac{K}{3} \right)$$

Za date uslove dobija se:

$$\bar{F} = 550 \cdot 10^3 / 150 = 3,67 \cdot 10^3 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{zmax} = \frac{3}{2} \left(\frac{3,67 \cdot 10^3}{40,5} - \frac{55}{3} \right) = 108,4 \text{ N/mm}^2$$

b) Radni pritisak sabijanja biće:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\bar{F}}{a \cdot l} = \frac{3,67 \cdot 10^3}{40,5} = 90,6 \text{ N/mm}^2$$

c) Iz napred navedenih izraza sledi:

$$\sigma_z = 108,4 - 0,13 \cdot x^2$$

$$F = 16260 \cdot a - 1,63 \cdot a^3$$

Za $a=55$ mm dobija se:

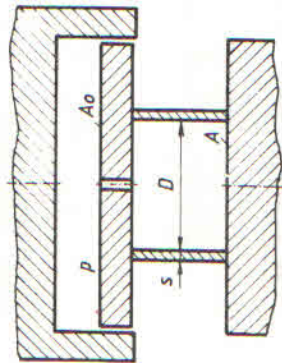
$$F = 16260 \cdot 55 - 1,63 \cdot 55^3 = 623,1 \cdot 10^3 \text{ N} < 630 \text{ kN}$$

Dakle, sabijanje na datoj presezi je moguće.

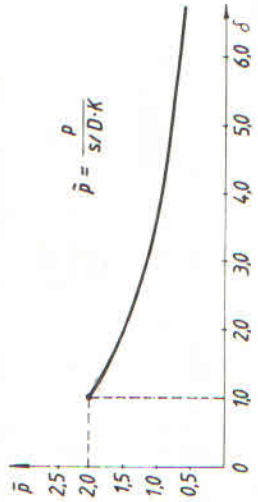
ZADATAK 1.17: Tankozidna cev, debljine zida s i radijusa $r=D/2$, opterećena je unutrašnjim pritiskom p i silom sabijanja od hidrauličnog klipa (slika 1.10) /26/. Površina klipa je A_0 a površina unutrašnjosti cevi je A .

Pri Mizesovom uslovu plastičnosti, zanemarujući sabijanje na čeonim površinama cevi i radijalne napone, potrebno je odrediti:

- pritisak p neophodan za pojavu plastičnih deformacija u materijalu tankozidne cevi. Dati grafički prikaz;
- odnos površina $\delta = A_0/A$, koji je neophodan za obezbeđenje ravanskog deformacionog stanja.



Sl. 1.10



Sl. 1.11

REŠENJE:

a) Normalni napon u cirkularnom pravcu u sudu pod pritiskom određuje se iz poznatog obrasca /56/:

$$\sigma_{\theta} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot s} \quad (1.48)$$

Aksijalni normalni napon u cevi je posledica sile sabijanja $F=p \cdot (A_0-A)$. Kako je poprečni presek cevi $A_C = 2\pi r \cdot s$, dobija se:

$$\sigma_z = \frac{F}{A_C} = \frac{p \cdot (A_0 - A)}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot s} = \frac{p \cdot \delta}{2} (\delta - 1) \quad (1.49)$$

Uzimajući da važi $\sigma_r = 0$, Mizesov uslov plastičnosti (v. glavlje III - obrazac (1.65)), nakon sredjivanja postaje

$$\sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 \left[1 + \frac{(\delta-1)^2}{2} \right] + \sigma_\theta \frac{2(\delta-1)^2}{4} = 2K^2, \quad (1.50)$$

odakle sledi:

$$\sigma_\theta = \frac{2K}{\sqrt{3+\delta^2}} \quad (1.51)$$

$$p = \frac{4}{\sqrt{3+\delta^2}} \cdot \frac{s}{D} \cdot K$$

b) Relacija (1.39) za $d_z = 0$ postaje:

$$\frac{d\epsilon_\theta}{\sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\epsilon_r}{\sigma_z} \quad \text{t.j.,} \quad d\epsilon_\theta = d\epsilon_r \left(1 - \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z} \right)$$

Sledi:

$$d\epsilon_r + d\epsilon_\theta = d\epsilon_r \left(2 - \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z} \right) = 0$$

Unoseći u ovaj izraz σ_z iz obrasca (1.49) dobija se:

$$\delta = A_0/A = 1$$

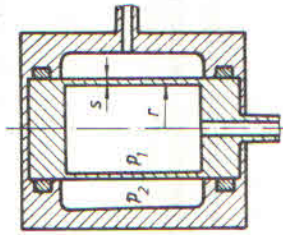
Napomena: Zbog malih plastičnih deformacija (početak tečenja) u ovom primeru se operiše sa priraštajima deformacija ("teorija tečenja") /64/, /11/.

Grafički prikaz izraza (1.50) dat je na slici 1.11. Iz prirode procesa sleduje da je $\delta > 1$. Iz tehničkih razloga nema opravdanja povećavati odnos δ preko 6, jer je efekat smanjenja pritiska p veoma mali.

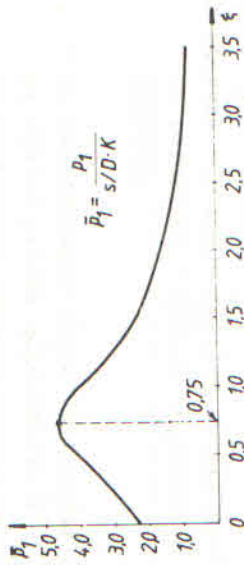
ZADATAK 1.18: Tankosidni cilindar, debljine zida s i radijusa $r = D/2$, ugrađen je u spoljašnji cilindar, ali sa mogućnošću aksijalnog pomeranja (slika 1.12) /26/.

Pritisak u spoljašnjem cilindru je p_2 a u unutrašnjem p_1 . Radijalni napon i deformacije u presecima blizu dna tankosidnog cilindra mogu se zanemariti.

Za slučaj da se u tankosidnom cilindru pojave plastične deformacije, potrebno je postaviti zavisnost $p_1 = f(\xi) = f(p_2/p_1)$, koristeći uslov plastičnosti Mizesa. Dati grafik ove funkcije.



Sl. 1.12



Sl. 1.13

REŠENJE: U ovom slučaju radijalni normalni napon $\sigma_r = 0$, a aksijalni se određuje po obrascu:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{p_1 \cdot r^2}{2\pi r \cdot s} = \frac{p_1 \cdot r}{2 \cdot s} \quad (1.52)$$

Izraz (1.48) sada postaje:

$$-\sigma_\theta = \frac{(p_2 - p_1) \cdot D}{2 \cdot s} = \frac{p_1 \cdot r}{s} \cdot (\xi - 1) \quad (1.53)$$

Uslov plastičnosti Mizesa se sada svodi na oblik:

$$\frac{p_1 \cdot r^2}{s} \left[(\xi - 1)^2 + \frac{1}{4} + \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right] = 2K^2,$$

odakle sledi:

$$p_1 = \frac{s}{D} \cdot K \cdot \frac{4}{\sqrt{4\xi^2 - 6\xi + 3}} \quad (1.54)$$

Grafički prikaz izraza (1.54) dat je na slici 1.13.

ZADATAK 1.19: Epruveta dimenzija $d_0 \times l_0 = 10 \times 100$ mm isteže se konstantnom brzinom $V_0 = 0,5$ mm/s. Ravnomerno deformisanje epruvete traje 10 sekundi.

- Na kraju procesa deformisanja treba odrediti:
- komponente tenzora brzine deformacije T ;
 - glavne brzine deformacije;
 - ekvivalentnu brzinu deformacije.

REŠENJE:

a) Relativne i ugaone deformacije (klizanje) mogu se, za poznata pomeranja čestica materijala, odrediti iz izraza /64/, /46/, /11/:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.55)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (1.56)$$

Kada su u pitanju komponente tenzora brzine deformacije onda treba u izraze (1.55) i (1.56) na mesto deformacija i pomeranja uvesti njihove prve izvode, npr.: umesto $\epsilon_x - \epsilon_x'$, umesto $u_x - \dot{u}_x = V_x$, itd.

Kako se radi o osnosimetričnom deformisanju, pogodno je proces analizirati u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu.

Zbog simetrije opterećenja može se pretpostaviti da je brzina u pravcu z-ose (slika 1.14) linearna funkcija samo koordinate z:

$$V_z = C_0 + C_1 \cdot z$$

Iz uslova $V_z = 0$, za $z=0$, dobija se da je $C_0 = 0$, a iz uslova $V_z = V_0$, za $z=l$, sleduje da je $C_1 = V_0/l$. Funkcija aksijalne brzine sada dobija oblik:

$$V_z = \frac{V_0}{l} \cdot z \quad (1.57)$$

Za osnosimetrično naponsko-deformaciono stanje komponente tenzora brzine deformacije se, po analogiji sa obrascima (1.55) i (1.56), određuju iz izraza /64/, /46/:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_r}{r}; \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.58)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}; \quad \dot{\gamma}_{\theta z} = \dot{\gamma}_{\theta r} = 0 \quad (1.59)$$

Uslov postojanosti zapremine sada postaje:

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.60)$$

Odatve se, posle izvesnih transformacija, dobija:

$$V_r = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial V_z}{\partial z} \cdot r \cdot dr + C \quad (1.61)$$

Unošenjem izraza (1.57) u integral (1.61), integraljenjem i korišćenjem uslova da je $V_r = 0$ za $r=0$, dobija se:

$$V_r = -\frac{V_0}{2l} \cdot r \quad (1.62)$$

Komponente tenzora brzine deformacije (1.58) i (1.59) su

$$\dot{\epsilon}_r = -\frac{V_0}{2l}; \quad \dot{\epsilon}_\theta = -\frac{V_0}{2l}; \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{V_0}{l}; \quad \dot{\gamma}_{rz} = \dot{\gamma}_{\theta z} = \dot{\gamma}_{\theta r} = 0 \quad (1.63)$$



Slika 1.14

Kako je na kraju procesa $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 100 + 0,5 \cdot 10 = 105$ mm, do-
bija se:

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta = -0,00238 ; \dot{\epsilon}_z = 0,00476 \quad (s^{-1})$$

b) Kako su ugaone brzine deformacije jednake nuli, kom-
ponente $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_\theta$ i $\dot{\epsilon}_z$ su ujedno i glavne brzine deformacije.

Napomena: Postupak određivanja glavnih linearnih defor-
macija i brzina deformacija je potpuno analogan postupku odre-
đivanja glavnih normalnih napona /64/, /59/, /46/, kako je to
pokazano u zadatku 1.13.

c) Polazeći od obrasca (1.6b) i izvedenih izraza (1.63)
dobija se:

$$\dot{\epsilon}_e = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2} \cdot 2} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{V_0}{4l} + \frac{V_0}{2}} = \frac{V_0}{l} \quad (1.64)$$

Sledi:

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{0,5}{105} = 0,00476 \quad s^{-1} = \dot{\epsilon}_z$$

ZADATAK 1.20: U procesu osnosimetričnog deformisanja
obratka u zoni plastičnih deformacija eksperimentalno su od-
redjene prosečne vrednosti ekvivalentnog napona, ekvivalentne
deformacije i srednjeg normalnog napona: $\sigma_e = 318$ N/mm²; $\phi_e =$
 $= 0,46$; $\sigma = 105$ N/mm².

Potrebno je odrediti glavne normalne napone i deforma-
cije.

REŠENJE: Za osnosimetrično naponsko-deformaciono sta-
nje, posmatrajući telo (obradak) u celini, važe jednakosti:
 $\phi_2 = \phi_3$; $\sigma_2 = \sigma_3$. Iz izraza (1.6) i (1.36) sledi:

$$\phi_e = \phi_1 ; \sigma_e = \sigma_1 = \sigma_2$$

Glavne deformacije su onda:

$$\phi_1 = \phi_e = 0,46 ; \quad \phi_2 = \phi_3 = -\phi_1/2 = -0,46/2 = -0,23$$

Za obrazac (1.40) i (1.42) se dobija:

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\phi_e} = \frac{2 \cdot 318}{3 \cdot 0,46} = 460,87$$

$$\sigma_1 = \sigma + \lambda \cdot \phi_1 = -105 + 460,87 \cdot 0,46 = 107 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma + \lambda \cdot \phi_2 = -105 - 460,87 \cdot 0,23 = -211 \text{ N/mm}^2 = \sigma_3$$

Dakle, samo u tački A se materijal nalazi u stanju plastičnosti.

ZADATAK 1.22: U jednoj tački tela (ovratka) određeni su glavni normalni naponi sledećih vrednosti: -380 N/mm^2 i -620 N/mm^2 . Vrednost trećeg glavnog normalnog napona nije poznata. Ako je napon tečenja $K=720 \text{ N/mm}^2$, odrediti koliki može biti nepoznati napon (σ) da bi bio zadovoljen uslov (hipoteza) plastičnosti Treske - Sen-Venana*).

REŠENJE: Sen-Venanov uslov plastičnosti se izražava sledećim relacijama /45/, /11/:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = K \quad (1.67)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = K \quad (\text{za } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3) \quad (1.68a)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = K \quad (\text{za } \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3) \quad (1.68b)$$

Ako se pretpostavi da je $\sigma = \sigma_2$, onda uslov (1.66) nije zadovoljen:

$$-610 + 630 = 240 \text{ N/mm}^2 \neq K$$

Dalje, moguća je sledeća kombinacija vrednosti napona:

$$\sigma = \sigma_1; \quad \sigma_2 = -380; \quad \sigma_3 = -620 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

Iz obrazaca (1.68a) i (1.68b) sledi:

$$\sigma_1 = K + \sigma_3 = 720 - 620 = 100 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 - K = -620 - 720 = -1340$$

Zadovoljava samo rešenje: $\sigma_1 = 100 \text{ N/mm}^2$.

POGLAVLJE III: USLOVI PLASTIČNOSTI, KRIVE OJAČAVANJA

ZADATAK 1.21: U tri tačke tela koje se deformiše određeni su glavni normalni naponi (N/mm^2) ($\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$): A(-150; 0; -266,6); B(-150; -220,4; -266,6); C(165,5; 0; -91,5). Ako je napon tečenja $K=231,5 \text{ N/mm}^2$, odrediti prema uslovu (hipotezi) plastičnosti Hubera-Mizesa* koje se tačke (elementarne zapremine) tela nalaze u stanju plastičnosti.

REŠENJE: Prema Mizesovom uslovu plastičnosti za početak plastičnog tečenja i održavanje procesa plastičnog deformisanja materijala važi: $\sigma_e = K$.

Iz obrasca (1.36) se neposredno dobija:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2K^2 \quad (1.65)$$

Za ravansko deformaciono stanje ($\sigma_2=0$) sledi:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2 = K^2 \quad (1.66)$$

Za date tačke tela dobija se:

$$A: (-150)^2 - (-150) \cdot (-266,6) + (-266,6)^2 = 231,5^2 \text{ N/mm}^2 = K^2;$$

$$B: (-150 + 220,4)^2 + (-220,4 + 266,6)^2 + (-266,6 + 150)^2 = 2 \cdot 101,7^2 \text{ N/mm}^2 < 2 \cdot K^2$$

$$C: 165,5^2 - 165,5 \cdot (-91,5) + (-91,5)^2 = 225,6^2 \text{ N/mm}^2 < K^2$$

*) U daljem tekstu korišćiće se naziv "Mizesov uslov plastičnosti"

*) U daljem tekstu korišćiće se naziv "Sen-Venanov uslov plastičnosti"

Ostaje još jedna kombinacija vrednosti napona:

$$\sigma_2 = \sigma_3; \quad \sigma_2 = -620; \quad \sigma_1 = -380 \quad (\text{N/mm}^2)$$

Sledi:

$$\sigma_3 = \sigma_1 + K = -380 + 720 = 340 \quad (\text{N/mm}^2)$$

$$\sigma_3 = -K + \sigma_1 = -720 - 380 = -1100$$

Zadovoljava samo rešenje: $\sigma_3 = -1100 \text{ N/mm}^2$

Prema tome, u zavisnosti od orijentacije koordinatnog sistema, postoje dva rešenja:

$$(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = (100; -380; -620)$$

$$(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = (-380; -620; -1100)$$

ZADATAK 1.23: U različitim tačkama tela određeni su glavni normalni naponi ($\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$). Njihove vrednosti su: $A_1(150; 0; 250)$, $A_2(100; 0; -150)$, $A_3(-175; 0; -200)$. Napon tečenja iznosi $K=250 \text{ N/mm}^2$. Treba proveriti u kakvom se stanju (elastičnom, plastičnom) nalazi materijal u datim tačkama tela, prema Sen-Venanovom uslovu plastičnosti.

REŠENJE: U datom slučaju radi se o ravanskom naponskom stanju, za koje se Sen-Venanov uslov plastičnosti izražava relacijama $45/$, $11/$:

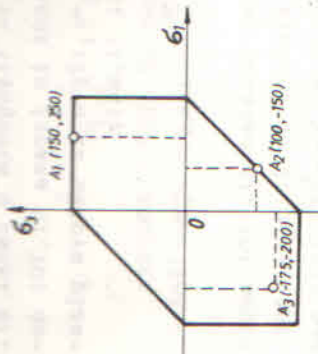
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm K \quad (\text{za } \sigma_1 \cdot \sigma_3 < 0)$$

$$\sigma_1 = \pm K \quad (\text{za } \sigma_1 \cdot \sigma_3 > 0 \text{ i } |\sigma_1| > |\sigma_3|) \quad (1.69)$$

$$\sigma_3 = \pm K \quad (\text{za } \sigma_1 \cdot \sigma_3 > 0 \text{ i } |\sigma_1| < |\sigma_3|)$$

Grafički prikaz relacija (1.69) predstavlja nepravilni šestougao, u koordinatnom sistemu $\sigma_1, 0, \sigma_3$ ($\sigma_2=0$) (slika 1.15).

Tačka tela, čije se naponske koordinate nalaze na "konturi plastičnosti", su u stanju plastičnosti. Ako su tačke unutar konture onda se materijal nalazi u elastičnom stanju.



Dakle, materijal se u tačkama A_1 i A_2 nalazi u plastičnom, a u tački A_3 u elastičnom stanju.

Sl. 1.15

ZADATAK 1.24: U procesu plastičnog deformisanja realizuje se ravansko naponsko stanje ($\sigma_2=0$). Korišćenjem Mizesovog uslova plastičnosti potrebno je odrediti maksimalne vrednosti glavnih normalnih napona σ_1 i σ_3 .

REŠENJE: Matematički izraz Mizesovog uslova plastičnosti za ovaj slučaj je dat obrascem (1.66).

Diferenciranjem izraza (1.66) se dobija:

$$\frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} (2\sigma_3 - \sigma_1) + 2\sigma_1 - \sigma_3 = 0$$

tj.:

$$\frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} = \frac{\sigma_3 - 2\sigma_1}{2\sigma_3 - \sigma_1} \quad (1.70)$$

Kako izraz (1.66) u koordinatnom sistemu $\sigma_1, 0, \sigma_3$ predstavlja elipsu (slika 1.16), to treba razmotriti dva slučaja.

U prvom je $d\sigma_3/d\sigma_1=0$ (tangenta u tački A), te iz izraza (1.70) se dobija $\sigma_1 = \sigma_3/2$, a iz uslova plastičnosti (1.66):

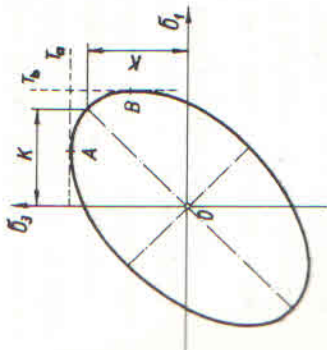
$$\sigma_3 = 2K/\sqrt{3} = \sigma_3 \text{ MAX} \quad (1.71a)$$

U drugom slučaju je

$d\sigma_3/d\sigma_1 = \infty$ (tangenta u tački B), te se sada iz izraza (1.70) dobija $\sigma_3 = \sigma_1/2$, a iz uslova plastičnosti (1.66):

$$\sigma_1 = 2K/\sqrt{3} = \sigma_{1\max} \quad (1.71b)$$

Napomena: Obrazac (1.71b) neposredno sledi iz (1.71a), jer zamenom oznaka koordinatnih osa, tj. zamenom indeksa u uslovu plastičnosti (1.66), isti se ne menja.



Sl. 1.16

ZADATAK 1.25: U inženjerskim proračunima često se koristi približni uslov plastičnosti u obliku:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta K \quad (1.72)$$

gde je: β - promenljivi koeficijent (Lodeov koeficijent)

Pri tome su glavni normalni naponi indeksirani tako da važi: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Potrebno je utvrditi u kojim se granicama kreće vrednost Lodeovog koeficijenta.

REŠENJE: S obzirom na to da je izraz (1.72) uprošćeni prikaz Mizesovog uslova plastičnosti (1.65), može se napisati:

$$\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{K} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right)^2}} \quad (1.73)$$

Iz obrasca (1.46) se dobijaju sledeći odnosi:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1 - \nu}{2}; \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1 + \nu}{2} \quad (1.74)$$

*1 Podrazumeva se da ne egzaktno, oboje oznake jednako i istovremeno

Unošenjem relacija (1.74) u izraz (1.73) se dobija:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu}} \quad (1.75)$$

Imajući u vidu da napon σ_2 ne može biti veći od napona σ_1 , niti manji od napona σ_3 , iz relacije (1.74) sledi: $-1 \leq \nu \leq 1$.

U datom dijapazonu promene koeficijenta napona ν funkcija (1.75) ima maksimum za $\nu = 0$, jer je:

$$\left(\frac{d\beta}{d\nu}\right)_{\nu=0} = 0$$

Prema tome, dobija se:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{za } \nu = -1 \\ 2/\sqrt{3} & \text{za } \nu = 0 \\ 1 & \text{za } \nu = 1 \end{cases}$$

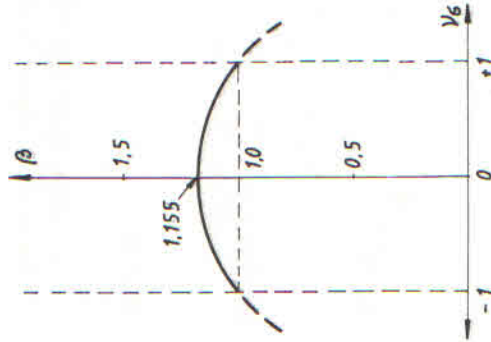
Dakle, vrednost Lodeovog koeficijenta se kreće u granicama (slika 1.17):

$$1 \leq \beta \leq 2/\sqrt{3} \quad (1.76)$$

Sl. 1.17

Napomena: Maksimalna vrednost Lodeovog koeficijenta

$\beta = 2/\sqrt{3} = 1,155$ se odnosi na ravansko deformaciono stanje ($\nu = 0$) datak 1.15).



ZADATAK 1.26: Kriva ojačavanja jednog materijala data je u obliku funkcije:

$$K = K_0 + C \cdot \psi^n \quad (1.77)$$

gde su:

$$K_0 = K(\psi=0) = \text{početna vrednost napona tečenja,}$$

$$C, n = \text{konstante krive.}$$

Potrebno je:

- a) koristeći metod jednoasnog istezanja epruveta ponašati izrazi za proračun konstanti C i n;
 b) odrediti jednačinu krive ojačavanja, ako su za dati materijal poznati podaci: $\sigma_m = 471 \text{ N/mm}^2$; $K_O = 352 \text{ N/mm}^2$; $\psi_m = 0,15$.

REŠENJE:

a) Napon tečenja (specifični deformacioni otpor), kao stvarni napon u poprečnom preseku epruvete, može se u toku i na kraju procesa ravnomernog deformisanja izraziti kao:

$$K = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0(1-\psi)} = \frac{\sigma}{1-\psi} \quad (1.78a)$$

$$K_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{F_m}{A_0(1-\psi_m)} = \frac{\sigma_m}{1-\psi_m} \quad (1.78b)$$

gde je:

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} = 1 - \frac{1}{e^{\phi}} \quad (1.79)$$

Iz izraza (1.77) i (1.78b) sledi:

$$K_m = K_O + C \cdot \psi_m^n = \sigma_m / (1 - \psi_m) ,$$

odakle je:

$$C = \frac{K_m - K_O}{\psi_m} = \frac{\sigma_m - K_O \cdot (1 - \psi_m)}{(1 - \psi_m) \cdot \psi_m} \quad (1.80)$$

U trenutku početka lokalizovane deformacije ($\psi = \psi_m$) sila deformisanja postaje $F = F_{\max}$, pa je prvi izvod u toj tački jednak nuli:

$$\left(\frac{dF}{d\psi} \right)_{\psi=\psi_m} = \frac{d[K_O \cdot A_0 \cdot (1 - \psi)]}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi_m} = -K_O A_0 + \frac{K_m - K_O}{\psi_m} \cdot A_0 [(1 - \psi)^n + (1 - \psi) \cdot n \cdot \psi^{n-1}] \Big|_{\psi=\psi_m} = 0 ,$$

odakle je:

$$n = \frac{K_m \cdot \psi_m}{(K_m - K_O) \cdot (1 - \psi_m)} = \frac{\sigma_m \cdot \psi_m}{(1 - \psi_m) \cdot (\sigma_m - (1 - \psi_m) \cdot K_O)} \quad (1.81)$$

b) Na osnovu izraza (1.77), (1.80) i (1.81) se dobija:

$$K = K_O + (K_m - K_O) \cdot \left(\frac{\psi}{\psi_m} \right)^n = \frac{K_m \cdot \psi_m}{(K_m - K_O) \cdot (1 - \psi_m)} \cdot \left(\frac{\psi}{\psi_m} \right)^n \quad (1.82)$$

Unoseći date podatke u obrasce (1.78b) i (1.82) dobija se:

$$K = 352 + 506,3 \cdot \psi^{0,484}$$

ZADATAK 1.27: Rešiti prethodni zadatak, pod uslovom da se kriva ojačavanja aproksimira funkcijom oblika:

$$K = K_O + C \cdot \phi^n \quad (1.83)$$

REŠENJE: Prema napred opisanom postupku dobija se:

$$K_m = \sigma_m \cdot e^{\frac{\phi}{\psi_m}} \quad (1.84)$$

$$C = \frac{K_m - K_O}{\psi_m} = \frac{\sigma_m \cdot e^{\frac{\phi}{\psi_m}} - K_O}{\psi_m} \quad (1.85)$$

$$n = \frac{K_m \cdot \psi_m}{K_m - K_O} \quad (1.86)$$

$$K = K_O + (K_m - K_O) \cdot \left(\frac{\phi}{\psi_m} \right)^n \quad (1.87)$$

Za date podatke u ovom slučaju se dobija:

$$K = 352 + 454,1 \cdot \phi^{0,445}$$

Komentar: Ukoliko je u funkcijama (1.77) i (1.83) $K_O = 0$, onda se dobijaju najčešće korišćene aproksimacije krivih oja-

čavanja:

$$K = C \cdot \psi^n = \frac{\sigma_m \cdot \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n}{1 - \psi_m} \quad (1.88)$$

$$K = C \cdot \phi^n = \sigma_m \cdot e^{\frac{\phi}{\phi_m}} \quad (1.89)$$

ZADATAK 1.28: Postupkom istezanja epruvete od aluminijumske legure dobijena je kriva ojačavanja oblika $K=300 \cdot \psi^{0,25} \text{ N/mm}^2$. Potrebno je odrediti jačinu na kidanje (zateznu čvrstoću) datog materijala.

REŠENJE: U ovom slučaju su konstante krive: $C=300$; $n=0,25$.
Iz izraza (1.88) sledi:

$$n = \psi_m / (1 - \psi_m) = 0,25,$$

odakle je:

$$\psi_m = 0,20$$

Koristeći izraz (1.78b) dobija se:

$$K_m = \sigma_m / (1 - \psi_m) = 300 \cdot \psi_m^{0,25},$$

te je konačno:

$$\sigma_m = 300 (1 - \psi_m)^{0,25} = 300 (1 - 0,2) \cdot 0,2^{0,25} = 160,5 \text{ N/mm}^2$$

ZADATAK 1.29: Iz tehničkog dijagrama napona ($\sigma - \epsilon$), jedinog istezanjem standardne epruvete na kidalici, uzete su koordinate tačaka: $V(\sigma_v; \epsilon_v)$, $M(\sigma_m; \epsilon_m)$.

Potrebno je:

- odrediti krivu ojačavanja oblika $K=C \cdot \psi^n \text{ N/mm}^2$, tj. konstante C i n , koristeći navedene uslove;
- iz dobijenih izraza odrediti vrednosti konstanti C i n , za sledeće podatke u izabranim tačkama: $V(240; 0,003)$; $M(480; 0,25)$.

REŠENJE:

a) Za tačku V važi relacija:

$$\sigma_v = C \cdot \psi_v^n,$$

odakle je: $C = \sigma_v / \psi_v^n$

Sledi:

$$K = \sigma_v \left(\frac{\phi}{\phi_v}\right)^n$$

Za tačku M će onda biti:

$$K_m = \sigma_m (1 + \epsilon_m) = \sigma_m \cdot e^{\frac{\phi_m}{\phi_v} n} = \sigma_v \left(\frac{\phi_m}{\phi_v}\right)^n,$$

odakle se dobija:

$$n = \frac{\phi_m - \ln(\sigma_v / \sigma_m)}{\ln(\phi_m / \phi_v)}$$

b) Za date podatke dobija se:

$$\phi_v = \ln(1 + \epsilon_v) = \ln(1 + 0,003) = 0,00299; \phi_m = \ln(1 + \epsilon_m) =$$

$$= \ln(1 + 0,25) = 0,223$$

$$n = 0,213; C = 827,4$$

ZADATAK 1.30: Krive ojačavanja jednog materijala dobijene istezanjem standardne epruvete date su u obliku: $K=C_1 \cdot \psi^{n_1}$; $K=C_2 \cdot \psi^{n_2}$; $K=C_3 \cdot \psi^{n_3}$.
Potrebno je:

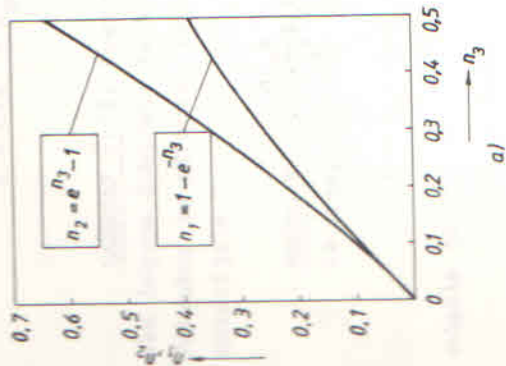
a) Odrediti vezu između eksponenata krivih: $n_1 = f_1(n_3)$, $n_2 = f_2(n_3)$ /26/; dati grafik ovih funkcija u intervalu $n_3 = 0 + 0,5$;

b) aproksimirati krivu $n_1 = f_1(n_3)$ pravom linijom koja prolazi kroz koordinatni početak ($n_1 = a \cdot n_3$), pod uslovom da apsolutna greška bude minimalna.

a) Kriva ojačavanja $K=K(\epsilon)$ u opštem slučaju ima oblik

/11/, /66/:

$$K = \sigma_m (1 + \epsilon_m)^n \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m}\right)^{n_3} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_m}\right)^{\psi_m} \cdot (1 + \epsilon_m)^{\phi_m} \quad (1.89)$$



Iz obrazaca (1.89), (1.87) i (1.88) sledi:

$$n_1 = \frac{\epsilon_m}{1 + \epsilon_m}; \quad n_2 = \frac{\psi_m}{1 - \psi_m} = \epsilon_m; \quad (1.90)$$

$$n_3 = \phi_m = \lambda n (1 + \epsilon_m) \quad (1.90)$$

gde su:

$\epsilon_m, \psi_m, \phi_m$ - relativna deformacija, kontrakcija i logaritamska deformacija u trenutku guštica stabilnosti ravnomernog (homogenog) deformisanja.

Iz jednakosti (1.90) lako

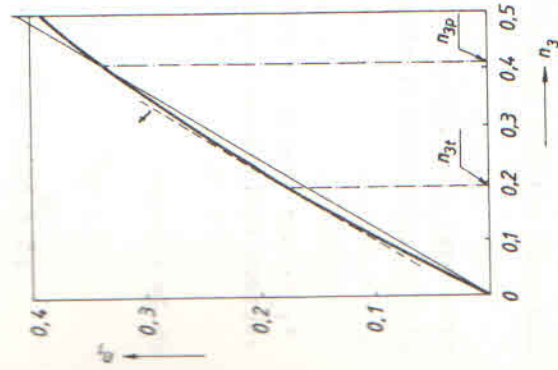
se dobija:

$$n_1 = 1 - e^{-n_3} \quad (1.91)$$

$$n_2 = e^{n_3} - 1 \quad (1.92)$$

Grafici ovih funkcija dati su na slici 1.18a.

b) Iz oblika funkcije (1.91) sleduje da se aproksimacija mora izvršiti tako da prava linija seče pomenutu funkciju u datom intervalu koordinate n_3 . Najveća apsolutna greška javiće se na kraju intervala ($n_3=0,5$) i na mestu gde je tan-



Sl. 1.18

genta na datu krivu pavalatina sa traženom pravom linijom ($n_3=0,3t$).

Apsolutne greške, prema slici 1.18b, biće:

$$|\Delta n_1^*| = a \cdot 0,5 - (1 - e^{-0,5})$$

$$|\Delta n_1^{**}| = (1 - e^{-3t}) - a \cdot n_{3t}$$

Dalje je:

$$\frac{dn_1}{dn_3} = e^{-n_3}$$

odakle sledi:

$$a = e^{-n_{3t}}$$

Iz uslova $|\Delta n_1^*| = |\Delta n_1^{**}|$, numeričkim postupkom je dobijeno $n_{3t} = 0,197$. Konačno, jednačina prave linije postaje:

$$n_1 = e^{-0,197 \cdot n_3} = 0,821 \cdot n_3$$

ZADATAK 1.31: Krive ojačavanja se mogu dobiti i postupkom sabijanja relativno kratkih cilindričnih epruveta. Pri tome se dobrim podmazivanjem trenje mora da smanji na minimum, čime se obezbedjuje (približno) jednoosno naponsko stanje.

Tretirajući ovakvo sabijanje kao idealno, napon tečenja se određuje iz jednostavne relacije:

$$K = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} e^{-\phi} \quad (1.93)$$

a stepen deformacije kao:

$$\phi = \lambda n \frac{h_0}{h_1} \quad (1.94)$$

Sabijanjem većeg broja epruveta od jedne legure aluminijuma (AlMg1SiCu), merenjem sile i visine epruvete na kraju procesa, i korišćenjem izraza (1.93) i (1.94), dobijeni su

Sledeći podaci:

K (N/mm ²)	188,3	2000	2085	2162	2206	2236	2280	2323	2352	2378	2413	2466	2486	2541
f (-)	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70

Potrebno je odrediti konstante krive ojačavanja oblika $K = C \cdot \phi^n$.

REŠENJE: Logaritmovanjem opšteg izraza $K = C \cdot \phi^n$ dobija se:

$$\ln K = \ln C + n \cdot \ln \phi \quad (1.95a)$$

U dvostrukoj logaritamskoj podeli izraz (1.95a) predstavlja jednačinu prave linije:

$$Y = a + b \cdot X \quad (1.95b)$$

Statističkom obradom eksperimentalnih podataka (regresionom analizom) moguće je odrediti nepoznate konstante (a, b) regresione linije (1.95b), a time i konstante krive ojačavanja ($n=b$; $c=e^a$) /68/, /7/, /33/.

Konstante krive ojačavanja se određuju iz izraza:

$$C = e^{\frac{\sum (\ln K_i / N - n \cdot \ln \phi_i / N)}{n}}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1.96)$$

$$n = \frac{\sum (\ln \phi_i) \cdot (\ln K_i) - (\sum \ln \phi_i) \cdot (\sum \ln K_i) / N}{\sum (\ln \phi_i)^2 - (\sum \ln \phi_i)^2 / N} \quad (1.97)$$

Za veliki broj opita (N) manuelno određivanje konstanti krive, preko izraza (1.96) i (1.97), je veoma dugotrajno i zamorno. Zato je razvijen program za računar "KODSE" (v. Dodatak - Sl.1.13d) /39/, gde su uvedene oznake: $X = \ln \phi$; $Y = \ln K$; $A = \ln C$; $B = n$. Programom je predviđeno izračunavanje koeficijenta korelacije (R) i relativne greške (DELTA).

Rezultati proračuna za zadate podatke, primenom programa "KODSE", dati su na slici 1.19.

KRIVA OJAČAVANJA U OBLIKU STEPENE FUNKCIJE
DOBIJENA SABIJANJEM EPRUVETA

MATERIJAL: ALUMINIJUM

KONSTANTE KRIVE: $C = 256.57$ $N = 0.111$

KOEFICIJENT KORELACIJE: $R = 0.99$

TABLICA ULAZNIH (EKSPERIMENTALNIH) I IZLIZNIH (RAČUNSKIH) REZULTATA

FI	K	KRAČ	DELTA
0.050	188.30	185.49	1.49
0.100	200.00	200.31	-0.15
0.150	208.50	209.52	-0.49
0.200	216.31	216.31	-0.05
0.250	220.60	221.73	-0.51
0.300	223.60	226.26	-1.19
0.350	228.00	230.16	-0.95
0.400	232.30	233.59	-0.56
0.450	235.20	236.66	-0.62
0.500	237.80	239.44	-0.69
0.550	241.30	241.99	-0.28
0.600	246.60	244.33	0.92
0.650	248.60	246.51	0.84
0.700	254.10	248.55	2.19

Sl. 1.19

ZADATAK 1.32: Standardna epruveta dimenzija $d_0 \times l_0 = 10 \times 100$ mm isteže se na kidalici u dva stupnja, najpre sa stepenom deformacije $\epsilon_1 = 22,5\%$, a zatim do prekida. Nakon prekida sa dijagrama tehničkog napona ($\sigma - \epsilon$) očitane su sledeće vrednosti: $\sigma_m = 200$ N/mm²; $\epsilon_m = 32\%$.

Potrebno je odrediti:

- analitički izraz krive ojačavanja III reda, u obliku stepene funkcije;
- stepen deformacije u drugom stupnju deformisanja (ϵ_2), u trenutku pojave lokalizovane deformacije;

c) prečnike epruvete, koji odgovaraju stepenima deformacije ϵ_1 i ϵ_2 .

REŠENJE:

a) Opšti oblik krive ojačavanja III reda jeste $K \cdot \sigma \cdot \epsilon^n$.
 Iz izraza (1.88) i (1.90) sledi:

$$n = \frac{\ln \sigma_m}{\ln(1+\epsilon_m)} = \frac{\ln(1+0,32)}{\ln(1+0,32)} = 0,278$$

$$C = \frac{\sigma_m \cdot e^n}{n} = \frac{200 \cdot e^{0,278}}{0,278} = 377$$

Analiitički oblik krive ojačavanja je onda:

$$K = 377 \cdot \phi^{0,278}$$

b) Ukupni stepen deformacije biće:

$$\phi_m = \phi_1 + \phi_2 = \ln(1+\epsilon_1) + \ln(1+\epsilon_2) = \ln(1,225) + \ln(1+\epsilon_2) = 0,278,$$

odakle je:

$$\epsilon_2 = 0,078 \quad (7,8\%)$$

c) Prečnici epruvete u domenu homogenog deformisanja

iznose:

$$d_1 = \frac{d_0}{\sqrt{1+\epsilon_1}} = \frac{10}{\sqrt{1+0,225}} = 9,035 \text{ mm}$$

$$d_2 = \frac{d_1}{\sqrt{1+\epsilon_2}} = \frac{9,035}{\sqrt{1+0,078}} = 8,702 \text{ mm}$$

ZADATAK 1.33: Elementarna zapremina tela koje se deformiše ("materijalna tačka") nalazi se u stanju plastičnog tečenja. U datom trenutku poznati su glavni normalni naponi: $\sigma_1 = 10 \text{ daN/mm}^2$; $\sigma_2 = -38 \text{ daN/mm}^2$; $\sigma_3 = -62 \text{ daN/mm}^2$.

Za materijal obratka je poznata kriva ojačavanja u ana-

litičkom obliku $K = 10 \cdot \phi^{0,15} \text{ daN/mm}^2$.

Za posmatranj trenutak treba odrediti glavne deformacije ϕ_1 , ϕ_2 i ϕ_3 , ako su $\phi_2 = \phi_3$. Koristiti pri tome Mizesov uslov plastičnosti.

REŠENJE: Za zadate uslove dobijaju se sledeće vrednosti napona tečenja i stepena deformacije:

$$K = \sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(10+38)^2 + (-38+62)^2 + (-62-10)^2} = 63,5 \text{ daN/mm}^2$$

$$\phi = \phi_e = \exp\left[\frac{1}{0,15} \cdot \ln \frac{K-30}{40}\right] = \exp\left[\frac{1}{0,15} \cdot \ln \frac{63,5-30}{40}\right] = 0,307$$

Iz izraza (1.6) i (1.4) sledi:

$$\phi_1 = \phi_e = 0,307; \quad \phi_2 = \phi_3 = -\phi_1/2 = -0,307/2 = -0,1535$$

ZADATAK 1.34: Istezanje standardne epruvete dimenzija

$d_0 \times l_0 = 10 \times 100 \text{ mm}$ vršeno je na mašini za ispitivanje materijala. Na kraju ravnomernog izduženja registrovana je sila $F_m = 14 \text{ kN}$ i određen prečnik $d_m = 8,5 \text{ mm}$.

Nakon pojave suženja epruvete proces je prekinut. U tom trenutku sila istezanja je iznosila $F = 12,5 \text{ kN}$, a prečnik na mestu suženja epruvete $d = 7,2 \text{ mm}$.

Potrebno je odrediti:

- stepen deformacije, napon tečenja i glavne normalne napone na kraju procesa ravnomernog (homogenog) istezanja epruvete;
- stepen deformacije, napon tečenja i glavne normalne napone na mestu suženja epruvete.

REŠENJE:

a) Stepen (logaritamski) deformacije u naznačenom momentu iznosi:

$$\epsilon_m = 2 \cdot \epsilon_n(d_0/d) = 2 \cdot \epsilon_n(10/8,5) = 0,325$$

Naponsko stanje je u ovom slučaju linearno (jednoosno):

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = F/A = K$$

Prena tome, biće:

$$K = \frac{4F}{\pi \cdot d_m^2} = \frac{4 \cdot 14000}{\pi \cdot 8,5^2} = 246,7 \text{ N/mm}^2$$

b) Stepen deformacije na mestu suženja iznosi:

$$\phi = 2 \cdot \epsilon_n(d_0/d) = 2 \cdot \epsilon_n(10/7,2) = 0,657$$

Naponsko stanje je sada troosno, a glavni naponi se određuju po obrascima Davidenkova /37/, /28/, /29/:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = K \left(1 + \frac{d^2 - 4r^2}{4dR}\right)$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = K \cdot \frac{d^2 - 4r^2}{4dR}$$

(1.98a)

$$\sigma_3 = \sigma_\phi = \sigma_r$$

gde su:

r - tekući radijus na mestu suženja,

R - radijus krivine na konturi suženja.

Za osu epruvete se dobija ($r=0$):

$$\sigma_1 = \sigma_2 = K \left(1 + \frac{d}{4R}\right)$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = K \cdot \frac{d}{4R}$$

$$\sigma_3 = \sigma_\phi = \sigma_r$$

(1.98b)

Kako je sila istezanja:

$$F = \int_0^{d/2} \sigma_\phi \cdot r \cdot dr,$$

to se iz izraza za σ_ϕ (1.98a), nakon integraljenja, dobija:

$$K = \frac{4F}{\pi d^2} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{d}{R}\right)^{-1} \quad (1.99)$$

Odnos d/R se može odrediti po približnom obrascu Bridžmena /6/:

$$d/R = (\sqrt{3} \cdot \phi - 0,2)^{0,81} \quad (1.100)$$

Sledi:

$$d/R = (\sqrt{3} \cdot 0,657 - 0,2)^{0,81} = 0,95$$

$$K = \frac{4 \cdot 12500}{\pi \cdot 7,2^2} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot 0,95\right) = 274,44 \text{ N/mm}^2$$

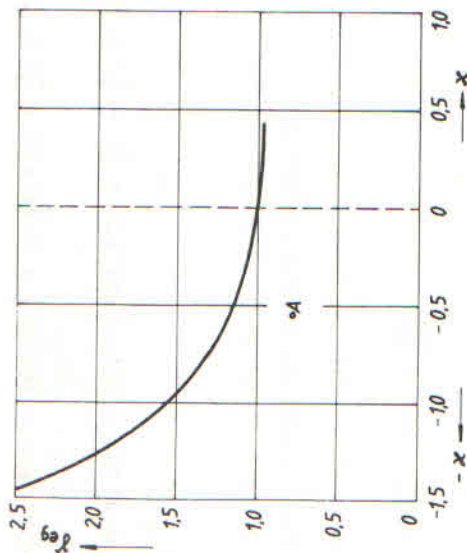
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_z = 274,44 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,95\right) = 339,62 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = \sigma_\phi = 274,44 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,95 = 65,18 \text{ N/mm}^2$$

POGLAVLJE IV: DEFORMABILNOST MATERIJALA. DIJAGRAM GRANIČNE DEFORMABILNOSTI (DGD)

ZADATAK 1.35: Na slici 1.20 je prikazan dijagram granične deformabilnosti jednog čelika, nakon termičke obrade /6/. Potrebno je:

- a) definisati veličine γ_{eg} i κ za slučajeve ravnomernog istezanja, sabijanja i uvijanja cilindričnih epruveta;
- b) proveriti da li će doći do pojave pukotina u posmatranoj tački zone plastičnih deformacija u procesu deformisanja, razmatranim u zadatku 1.20, ako je materijal obratka pomenuti čelik.



Sl. 1.20

REŠENJE:

- a) Prema Kalmogorovu /28/, /6/ DGD se može definisati kao funkcija pokazatelja naponskog stanja:

$$\gamma_{eg} = f(\epsilon) \quad (1.101)$$

gde su:

- γ_{eg} - granični (maksimalni) stepen deformacije klizanja;
- κ - pokazatelj naponskog stanja;
- σ - srednji normalni napon;
- $\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$ - ekvivalentni (uopšteni, efektivni) napon smicanja.

Pokazatelj naponskog stanja se definiše kao odnos:

$$\kappa = \frac{\sigma}{\tau_e} \quad (1.102)$$

Za slučaj ravnomernog istezanja cilindrične epruvete ($\sigma_1 = \sigma_e, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) lako se dolazi do sledećih relacija:

$$\kappa = 1/\sqrt{3} \approx 0,58 \quad (1.103)$$

$$\gamma_{eg} = 2\sqrt{3} \ln(d_0/d_m) = \sqrt{3} \cdot \phi_{eg}$$

gde su:

d_0, d_m - prečnici epruvete na početku i kraju homogenog istezanja.

Za proces (teoretski) homogenog sabijanja cilindrične epruvete biće:

$$\kappa = -1/\sqrt{3} \approx -0,58$$

$$(1.104)$$

$$\gamma_{eg} = \sqrt{3} \cdot \ln(h_0/h_p)$$

gde su:

h_0, h_p - visine epruvete na početku i kraju sabijanja, u trenutku pojave pukotine na bočnoj površini.

Za uvijanje cilindrične epruvete važi:

*) Novija istraživanja ukazuju i na uticaj koeficijenta ν , te se DGD izračuna i kao funkcija oblika $\gamma_{eg} = f(\kappa, \nu) / 28 /, /6/.$

$$\gamma_{eg} = \operatorname{tg} \phi$$

(1.105)

$$\kappa = 0$$

gde je:

ϕ - ugao nagiba linije (izvodnice) epruvete prema osi epruvete, meren nakon pojave prve pukotine.

Napomena: Za približnu konstrukciju DGD dovoljne su tri tačke, čije su koordinate date izrazima (1.103), (1.104) i (1.105).

b) Za uslove date u zadatku 1.20 dobija se:

$$\gamma_e = \sqrt{3} \cdot \phi_e = \sqrt{3} \cdot 0,46 = 0,797$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{107 - 211 - 211}{3} = -105 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_2 = 107 + 211 = 318 \text{ N/mm}^2$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{3} \cdot \sigma}{\sigma_e} = \frac{\sqrt{3} \cdot (-105)}{318} = -0,571$$

Prema slici 1.20 tačka A (-0,571; 0,797) se nalazi ispod DGD, te je deformisanje bez pojave pukotina moguće.

ZADATAK 1.36: Za proces istezanja cilindrične epruvete do prekida, potrebno je odrediti pokazatelj naponskog stanja κ i granični stepen deformacije γ_{eg} . Pri tome, uzeti u obzir uslove da se epruveta nalazi pod dejstvom:

- atmosfera pritiska;
- visokog hidrostatsičkog pritiska.

REŠENJE:

a) Unoseći izraze (1.98b) u izraz (1.102), za trenutak prekida se dobija /28/, /29/:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{d}{R_p} \right) \quad (1.106)$$

Granični stepen deformacije je tada:

$$\gamma_{eg} = 2\sqrt{3} \cdot \ln \left(\frac{d_0}{d_p} \right) \quad (1.107)$$

gde su:

d_p, R_p - prečnik epruvete na mestu prekida i radijus krivine konture epruvete na istom mestu.

b) Za istezanje epruvete, pri dodatnom dejstvu hidrostatsičkog pritiska (p), naponi na osi epruvete na mestu suženja su /28/, /3/:

$$\sigma_1^0 = \sigma_z^0 = K \left(1 + \frac{d}{4R} \right) - p$$

$$\sigma_2^0 = \sigma_r^0 = K \frac{d}{4R} - p \quad (1.108)$$

$$\sigma_3^0 = \sigma_p^0 = \sigma_r^0$$

Na osnovu izraza (1.108), pokazatelj naponskog stanja za trenutak prekida postaje /28/:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{d_p}{R_p} \right) - \frac{\sqrt{3} \cdot p}{K} \quad (1.109)$$

Granični stepen deformacije se računa, takođe, po obrascu (1.107).

Napomena: Iz izraza (1.106) sledi da je $\kappa > 0,58$, a iz izraza (1.109) da može biti $\kappa < 0,58$ (za različite vrednosti pritiska p). Time se može dobiti više tačaka krive DGD.

ZADATAK 1.37: Ako je pod uslovima, definisanim zadatakom 1.34, pri istezanju došlo do prekida epruvete, koja je pri tome bila izložena hidrostatsičkom pritisku od $p=2000$ bar, potrebno je odrediti:

* *Kako su tokom istezanja κ i d/R promenljivi, poželjno je opisati sa središnjim vrednostima: $(d/R)_{SP}, \kappa_{SP}, \kappa_{SP} / 28/, \phi / 8/$.*

- a) stepen deformacije γ_e i pokazatelj naponskog stanja κ
 b) pritisak tečnosti za koji bi se ostvarilo naponsko stanje koje odgovara čistom smicanju.

REŠENJE:

a) Kako je u ovom slučaju $d/R = d_p/R_p$, iz zadatka 1.34 sle-

$$d_p/R_p = 0,95; \quad K = 274,44 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_e = \sqrt{3} \cdot \phi_e = \sqrt{3} \cdot 0,657 = 1,14$$

Prema izrazu (1.109) se dobija:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 + \frac{3}{4} \cdot 0,95) - \frac{\sqrt{3} \cdot 200}{274,44} = -0,274$$

b) Za slučaj čistog smicanja važi: $\sigma_3 = 0, \sigma_1 = -\sigma_2$. Prema tome, biće $\sigma = 0$, a prema izrazu (1.102) je onda i $\kappa = 0$.

Iz izraza (1.109) se sada dobija:

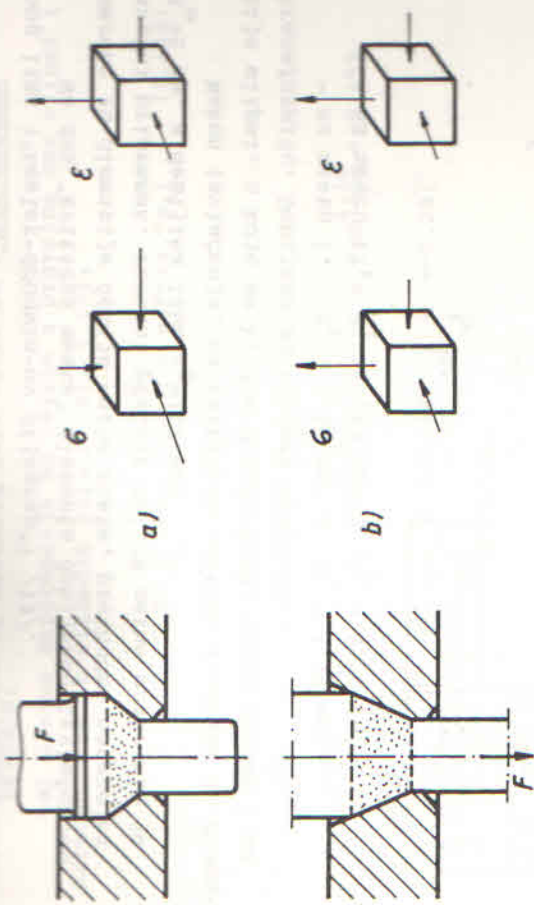
$$P = \frac{K}{3} (1 + \frac{3}{4} \frac{d}{R_p}) = \frac{274,44}{3} (1 + \frac{3}{4} \cdot 0,95) = 156,7 \text{ bar}$$

ZADATAK 1.38: Obrada jednog materijala vrši se istosmernim istiskivanjem i vučenjem. Koristeći DGD treba objasniti kojim se postupkom može ostvariti veći stepen deformacije u jednoj operaciji (stupnju).

REŠENJE: Na slici 1.21 su prikazane mehaničke šeme deformacija i napona za procese obrade materijala istiskivanjem (Sl. 1.21a) i vučenjem (Sl. 1.21b) /64/.

U oba procesa obrade (v. poglavlje XI) ostvaruje se istovetno deformaciono stanje, pri čemu je najveća deformacija u pravcu ose obratka ($\epsilon_2 = \epsilon_3 = -0,5 \cdot \epsilon_1$).

U procesu istosmernog istiskivanja ostvaruje se istomerno prostorno naponsko stanje (sva tri glavna normalna napona



Sl. 1.21

su naponi pritiska). Pri tome je napon na osi obratka σ_1 znatno manji od druga dva ($\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$).

U procesu vučenja ostvaruje se raznoimeno naponsko stanje (jedan napon je napon-istezanja a druga dva su naponi pritiska). Pri tome je napon na osi komada σ_1 veći od ostala dva ($|\sigma_2| = |\sigma_3| < \sigma_1$).

Polazeći od izraza za pokazatelj naponskog stanja

$$\kappa = \frac{\sigma}{\tau_e} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sigma}{\sigma_e}$$

i činjenice da je uvek napon σ_e pozitivan, mogu se doneti sledeći zaključci.

Prema izvedenoj analizi proizilazi da je kod istiskivanja uvek $\kappa < 0$, a time i $\kappa < 0$.

Kod vučenja je, po pravilu, obrnuto. Dakle, važi: $\kappa > 0$ i $\kappa > 0$.

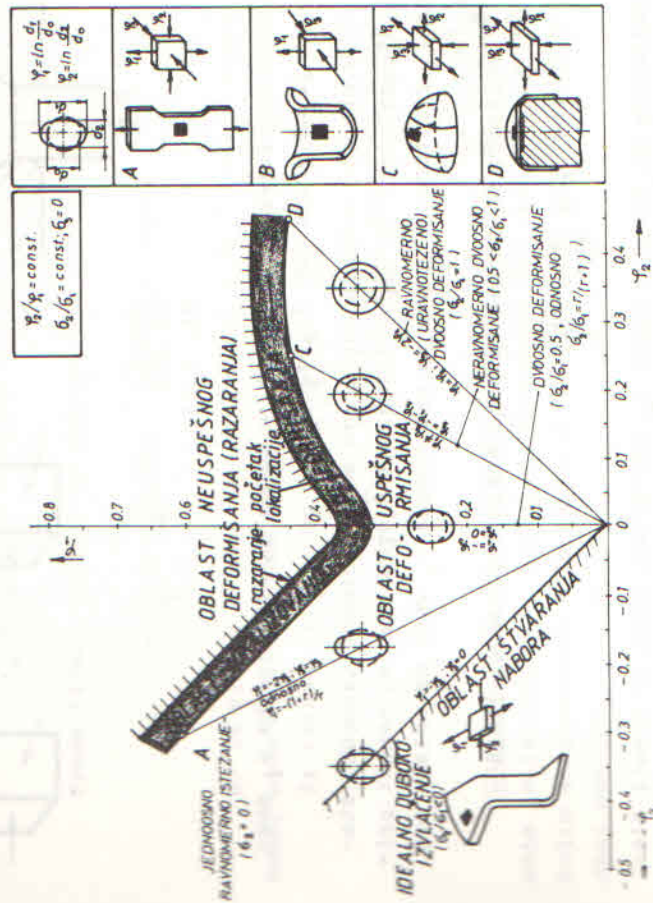
Kako je kod istosmernog istiskivanja obično $\kappa < -1$, to sa slike 1.20 sledi da je isti materijal moguće obradivati istiskivanjem sa višestruko većim stepenom deformacije nego vučenjem.

ZADATAK 1.19: Na slici 1.22 prikazan je DGD tankog čeličnog lima ("Keeler-Goodwin-ov dijagram") /12/.

Na dva "kritična mesta" elementa dobijenog izvlačenjem mere su dimenzije ćelija merne mreže, prethodno nanete na kružni pripremak. Početni prečnik ćelija merne mreže bio je $d_0 = 5$ mm, a debljina lima $s_0 = 1,2$ mm.

Nakon izvlačenja, na kritičnim mestima izmerene su dimenzije elipsi, u koje se kružne ćelije mreže tokom obrade lima transformišu. Dobijene su sledeće vrednosti:

- na mestu I, $d_1 = 8,15$ mm i $d_2 = 4,10$ mm;
- na mestu II, $d_1 = 7,84$ mm i $d_2 = 6,30$ mm.



Sl. 1.22

Za posmatrana kritična mesta potrebno je odrediti:

- glavne deformacije; proveriti da li postoji opasnost od razaranja lima;
- stanjenje lima;
- ekvivalentne deformacije;
- odnose glavnih normalnih napona i granične ekvivalentne deformacije.

REŠENJE:

a) Glavne deformacije se nalaze u pravcima osa elipsa i određuju se iz sledećih izraza (Sl. 1.23):

$$\phi_1 = \ln \frac{d_1}{d_0}; \phi_2 = \ln \frac{d_2}{d_0}; \phi_3 = -(\phi_1 + \phi_2) \quad (1.110)$$

Sledi:

- mesto I,

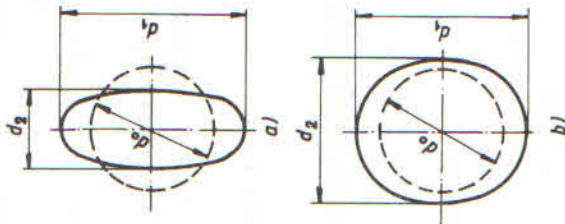
$$\phi_1 = \ln \frac{8,15}{5} = 0,489; \phi_2 = \ln \frac{4,10}{5} = -0,218$$

$$\phi_3 = -(0,489 - 0,218) = -0,271$$

- mesto II,

$$\phi_1 = \ln \frac{7,84}{5} = 0,450; \phi_2 = \ln \frac{6,30}{5} = 0,231$$

$$\phi_3 = -(0,450 + 0,231) = -0,681$$



Sl. 1.23

Sa slike 1.22 se uočava da je na kritičnom mestu II došlo do znatne lokalizacije deformacije, pa je potrebno izmenom tehnološkog postupka, zamenom materijala ili na drugi način, "spustiti" tačku II ispod DGD.

b) Kako je deformacija $\phi_3 = \ln(s_1/s_0)$, debljina lima nakon završenog procesa deformisanja se određuje iz obrasca:

$$s_1 = s_0 \cdot e^{\phi_3} \quad (1.111)$$

Sledi:

- mesto I,

$$s_1 = 1,2 \cdot e^{-0,271} = 0,9 \text{ mm}$$

- mesto II,

$$s_1 = 1,2 \cdot e^{-0,681} = 0,6 \text{ mm}$$

c) Ekvivalentne deformacije u ovom slučaju iznose:
- mesto I,

$$\phi_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{0,489^2 + 0,198^2} = 0,492$$

- mesto II,

$$\phi_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{0,45^2 + 0,231^2} = 0,693$$

d) Prema Tomljenovu /66/, /11/, naponsko-deformaciono stanje se pri obradi lima karakteriše veličinom:

$$m^* = \frac{2\phi_2 + \phi_1}{2\phi_1 + \phi_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (\sigma_3 = 0) \quad (1.112)$$

Ekvivalentni granični stepen deformacije se onda izražava u obliku:

$$\phi_{eg} = \frac{2\sqrt{1-m^*+m^{*2}}}{2-m^*} \cdot n \quad (1.113)$$

U ovom slučaju dobija se:
- mesto I,

$$m^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2(-0,198)+0,489}{2 \cdot 0,489-0,198} = 0,119$$

$$\phi_{eg} = \frac{2\sqrt{1-0,119+0,119^2}}{2-0,119} \cdot n = 1,006 \cdot n$$

- mesto II,

$$m^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2 \cdot 0,231 + 0,450}{2 \cdot 0,450 + 0,231} = 0,806$$

$$\phi_{eg} = \frac{2\sqrt{1-0,806+0,806^2}}{2-0,806} \cdot n = 1,538 \cdot n$$

Kako je, po pravilu, eksponent deformacionog ojačavanja $n < 0,5$, biće u ovom slučaju $\phi_{eg} < \phi_e$, što znači da će se dobiti neispravan (nekvalitetan) izradak.

ZADATAK 1.40: Za materijal lima poznata je kriva ojačavanja u obliku funkcije $K=785,5 \cdot \phi^{0,4}$ N/mm².

Na osnovu podataka iz prethodnog zadatka treba odrediti koeficijent iskorišćenja plastičnosti.

REŠENJE: Tomljenov /66/ je predložio koeficijent iskorišćenja plastičnosti kao odnos:

$$\eta = \frac{\phi_e}{\phi_{eg}} < 1 \quad (1.114)$$

Prema Devedžiću /11/ može se ovaj pokazatelj izraziti u obliku:

$$\omega = \phi_{eg} - \phi_e \geq 0 \quad (1.115)$$

Za date podatke dobija se:
- mesto I,

$$\eta = \frac{0,492}{1,006 \cdot n} = \frac{0,492}{1,006 \cdot 0,4} = 1,22$$

$$\omega = 1,006 \cdot n - 0,492 = 1,006 \cdot 0,4 - 0,492 = -0,09$$

- mesto II,

$$\eta = \frac{0,693}{1,538 \cdot n} = \frac{0,693}{1,538 \cdot 0,4} = 1,13$$

$$\omega = 1,538 \cdot n - 0,693 = 1,538 \cdot 0,4 - 0,693 = -0,08$$

Dakle, prema proračunu sledi da se na oba kritična mesta mogu pojaviti pukotine na gotovom komadu (izražku).

a) U praktičnim proračunima koeficijent anizotropije se najčešće izražava kao odnos (logaritamskih) stepena deformacije po širini i debljini epruvete od lima pri jednoosnom istezanju /22/, /66/, /17/, /11/:

$$r = \frac{\phi_b}{\phi_s} = \frac{\ln(b/b_0)}{\ln(s/s_0)} \quad (1.116a)$$

Koristeći postulat o postojanosti zapremine, izraz (1.117a) se lako transformiše u oblik:

$$r = \frac{\ln(b/b_0)}{\ln\left(\frac{\ell \cdot b}{\ell_0 \cdot b_0}\right)} \quad (1.116b)$$

gde su:

ℓ_0, b_0, s_0 - početne dimenzije mernog dela epruvete (ili merne mreže),

ℓ, b, s - dimenzije mernog dela epruvete (mreže) nakon deformisanja.

Srednja vrednost koeficijenta anizotropije se najčešće određuje iz sledećih izraza /22/, /11/:

$$\bar{r} = \frac{1}{4}(r_0 + 2r_{45} + r_{90}) \quad (1.117a)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{3}(r_0 + r_{45} + r_{90}) \quad (1.117b)$$

gde su:

r_0, r_{90}, r_{45} - koeficijent anizotropije za epruvete izrezane uzduž ($\alpha=0^\circ$) i popreko ($\alpha=90^\circ$) na pravac valjanja lima i pod uglom $\alpha=45^\circ$.

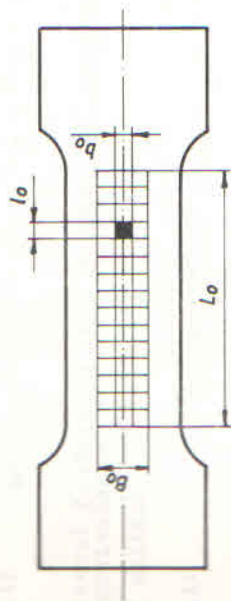
Na osnovu datih podataka, a prema izrazu (1.116b), dobija se:

$$r_0 = \frac{\ln(5,45/6)}{\ln(5,45 \cdot 5,08)} = 0,673$$

POGLAVLJE V: ANIZOTROPIJA MATERIJALA (LIMA)

ZADATAK 1.41: Za ispitivanje anizotropije lima od jednog ugljeničnog čelika korišćene su epruvete sa nanesenom mernom mrežom (Sl. 1.24), izrezane pod uglovima $\alpha=0^\circ, 45^\circ$ i 90° u odnosu na pravac valjanja lima.

Dimenzije čelija merne mreže bile su $b_0 \times \ell_0 = 6 \times 4$ mm.



Sl. 1.24

Nakon istezanja epruveta do pojave lokalizovane deformacije, izmerene su vrednosti prikazane u tablici.

α ($^\circ$)	b (mm)	ℓ (mm)	$\sigma_{v\alpha}$ (N/mm ²)
0	5,45	5,08	350,4
45	5,25	5,18	315,6
90	5,48	5,02	351,5

Potrebno je odrediti:

- koeficijent (normalne) anizotropije ("r-faktor") za različite pravce u ravni lima;
- srednju vrednost koeficijenta anizotropije.

$$r_{45} = \frac{\ln(5,25/6)}{\ln(5,25 \cdot 5,18)} = 1,068$$

$$r_{90} = \frac{\ln(5,48/6)}{\ln(5,48 \cdot 5,02)} = 0,664$$

b) Na osnovu izraza (1.117) sledi:

$$\bar{r} = \frac{1}{4}(0,673+2 \cdot 1,068+0,664) = 0,8683$$

$$\bar{r} = \frac{1}{3}(0,673+1,068+0,664) = 0,8017$$

ZADATAK 1.42: Za podatke date u prethodnom zadatku potrebno je:

- odrediti parametre anizotropije F, G, H, N ;
- odrediti napone tečenja σ_{ra} u različitim pravcima u ravni lima;
- izračunati (teorijsku) srednju vrednost koeficijenta anizotropije;
- nacrtati polarni dijagram anizotropije,
- odrediti pokazatelj naponsko-deformacionog stanja (m^*).

REŠENJE:

a) Uslov plastičnosti, prema Hila /22/, /11/, za anizotropan materijal može se izraziti u obliku:

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (1.118)$$

gde su:

f - funkcija tečenja;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - komponente tenzora napona;
 F, G, H, L, M, N - parametri anizotropije.

Pojedini parametri anizotropije mogu se odrediti iz sledećih relacija /22/:

$$\frac{H}{F} = r_{90}; \quad \frac{G}{F} = \frac{r_{90}}{r_0}; \quad \frac{H}{G} = r_0; \quad \frac{N}{F} = (r_{45} + 0,5)(1 + r_{90}/r_0) \quad (1.119)$$

$$F = \frac{1}{\sigma_{v90}^2 (1 + r_{90})}$$

Na osnovu prethodnog proračuna sledi:

$$\frac{H}{F} = 0,664; \quad \frac{G}{F} = \frac{0,664}{0,673} = 0,987; \quad \frac{H}{G} = 0,673;$$

$$\frac{N}{F} = (1,068 + 0,5)(1 + 0,664/0,673) = 3,115$$

$$F = \frac{1}{351,5^2 (1 + 0,664)} = 4,86 \cdot 10^{-6}$$

b) Napon tečenja u bilo kom pravcu u ravni lima može se odrediti po obrascu Hila /22/:

$$\sigma_{va}^2 = \frac{\sigma_{v90}^2 (1 + H/F)}{\sin^2 \alpha + (G/F) \cos^2 \alpha + H/F + (2N/F - 1 - G/F) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \quad (1.120)$$

Za uglove $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ i 90° dobija se:

$$\sigma_{v0}^2 = \frac{351,5^2 (1 + 0,664)}{0,987 + 0,664} = (352,88)^2$$

$$\sigma_{v45}^2 = \frac{351,5^2 \cdot (1 + 0,664)}{0,5 + 0,5 \cdot 0,987 + 0,664 + (2 \cdot 3,115 - 1 - 0,987 - 4 \cdot 0,664) 0,25} = (316,35)^2$$

$$\sigma_{v90}^2 = (351,5)^2$$

Uočava se dobra usaglašenost eksperimentalno određjenih i proračunatih vrednosti napona.

c) Srednja vrednost koeficijenta anizotropije može se odrediti po obrascu /22/:

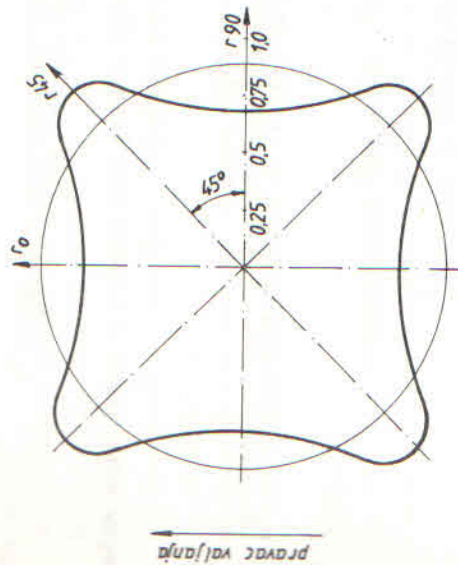
$$\bar{r} = \frac{H/F}{\sqrt{G/F}} + \frac{2N/F-1-G/F-4H/F}{2(\sqrt{G/F}+1)^2} \quad (1.121)$$

U ovom slučaju biće:

$$\bar{r} = \frac{0,664}{\sqrt{0,987}} + \frac{2 \cdot 3,115 - 1 - 0,987 - 4 \cdot 0,665}{2(\sqrt{0,987}+1)^2} = 0,868$$

Dobijeni rezultat odgovara vrednosti "r-faktora" proračunatog prema obrascu (1.117a).

d) Na slici 1.25 je prikazan polarni dijagram anizotropije datog lima.



Sli. 1.25

e) Pod pretpostavkom da postoji podudarnost pravaca glavnih napona i deformacija sa glavnim pravcima anizotropije, za pokazatelj naponsko-deformacionog stanja se dobija sledeći izraz /66/, /11/:

$$m^* = \frac{\phi_1 + \phi_2 (G/H+1)}{\phi_2 + \phi_1 (F/H+1)} \quad (1.122)$$

Za epruvetu izrezanu pod uglom $\alpha=0^\circ$ u odnosu na pravac valjanja dobija se:

$$\phi_1 = \ln(\epsilon/\epsilon_0) = \ln(5,08/4) = 0,239$$

$$\phi_2 = \ln(b/b_0) = \ln(5,45/6) = -0,096$$

$$m^* = \frac{0,239 - 0,096(1/0,673+1)}{-0,096 + 0,239(1/0,664+1)} = 0,00076$$

Komentar: Koeficijent anizotropije se za većinu materijala kreće u granicama $\bar{r}=0,2$ + $2,7/22$; dakle, može biti $\bar{r} \approx 1$.

Kada je $\bar{r} > 1$, iz obrasca (1.116a) se zaključuje da se deformisanje po širini vrši intenzivnije nego po debljini, te je opasnost od pojave lokalizovane deformacije znatno manja nego kada je slučaj obrnut, tj. kada je $\bar{r} < 1$. Zato su za duboko izvlačenje i druga oblikovanja lima pogodniji materijali sa koeficijentom anizotropije većim od jedinice.